Guía para examen extraordinario de Matemáticas VI área III

Temas que contiene la guía:

- Progresiones
- Función
- La derivada
- La integral
- Matrices y determinantes

1. ¿Qué es la derivada? Enuncie al menos tres interpretaciones distintas de este concepto.
2. ¿Qué es la integral? Enuncie al menos tres interpretaciones distintas de este concepto.
3. Un pequeño negocio vende \$10 000 en productos para el cuidado de la piel durante su primer año. El propietario del negocio ha establecido una meta de aumentar ventas anuales en \$7500 cada año durante 9 años. Suponiendo que se alcance esta meta, encuentre el total de ventas durante los primeros 10 años que este negocio opere.
4. Calcule la n-ésima suma parcial indicada de la sucesión aritmética dada:
   a) 8, 20, 32, 44,. . . , $n = 10$
   b) 75, 70, 65, 60,. . . , $n = 25$
5. Encuentre los primeros cuatro términos y el n-ésimo término de la sucesión infinita definida en forma recursiva como sigue:
   $$a_1 = 3, \quad a_{k+1} = 2a_k, \quad \text{para } k \geq 1$$
6. Si se depositan 100 dólares al final de cada mes en una cuenta que paga el 3 % de interés al año capitalizado mensuelmente, la cantidad de interés acumulado después de n meses está dada por la sucesión:
   $$I_n = 100\left(\frac{1{,}0025^n - 1}{0{,}0025} - n\right)$$
   a)Encuentre los primeros seis términos de la sucesión.
   b)¿Cuánto interés habrá obtenido después de dos años?
7. En un torneo de golf, 16 golfistas ganan con las puntuaciones más bajas. El primer lugar recibe un premio en efectivo de \$1000; el segundo; recibe un premio de \$950; el tercero, recibe \$900, y así sucesivamente. ¿Cuál es la cantidad total de dinero en premios?
8. Se hace un depósito de \$50 el primer día de cada mes en una cuenta que paga 6 % de interés, capitalizado mensualmente. ¿Cuál es el saldo al término de dos años? (Este tipo de plan de ahorros se denomina anualidad creciente.)
9. Encuentre la suma de la serie geométrica infinita:
   a) $8 + 6 + \frac{9}{2} + \frac{27}{8} + \ldots$
   b) $\frac{1}{9} - \frac{1}{3} + 1 - 3 + \ldots$
10. Una firma de inversiones ofrece un empleo vacante con un salario de \$45 000 para el primer año. Suponga que durante los siguientes 39 años hay un aumento de 5 % cada año. Encuentre la compensación total del periodo de 40 años.

11. Determine el dominio, rango, interseccones con los ejes, asíntotas y función inversa dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5}{x^2 - 6}$$

12. Determine el dominio, rango, interseccones con los ejes y función inversa de la siguiente función:

$$g(x) = 1 + \sqrt{2 + 3x}$$

13. El costo semanal C de producir x unidades en un proceso de manufactura está dado por $C(x) = 60x + 750$. El número de unidades x producidas en t horas está dado por $x(t) = 50t$.

    a) Encuentre e interprete $(C \circ x)(t)$.

    b) Encuentre el costo de las unidades producidas en 4 horas.

    c) Encuentre el tiempo que debe transcurrir para que el costo aumente a \$15 000.

14. Halle la función inversa f^{-1} de la siguiente función. Grafique f y f^{-1} en el mismo plano:

$$f(x) = \frac{8x - 4}{2x + 6}$$

15. Halle la función inversa f^{-1} de la siguiente función. Grafique f y f^{-1} en el mismo plano:

$$f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$$

16. El salario de usted es \$10.00 por hora más \$0.75 por cada unidad producida por hora. Por tanto, su sueldo y por hora en términos del número de unidades producidas x es $y = 10 + 0.75x$

    a) Encuentre la función inversa. ¿Qué representa cada variable en la función inversa?

    b) Determine el número de unidades producidas cuando su sueldo por hora es \$24.25.

17. En Pennsylvania, el impuesto estatal sobre la renta es directamente proporcional al ingreso bruto. Usted está trabajando en Pennsylvania y su deducción de impuesto estatal sobre la renta es de \$46.05 para un ingreso bruto mensual de \$1500. Encuentre un modelo matemático que dé el impuesto estatal sobre la renta en Pennsylvania en términos de ingreso bruto.

18. Un pequeño fabricante de electrodomésticos descubre que cuesta 9000 dólares producir 1000 tostadoras a la semana y 12000 dólares producir 1500 tostadoras a la semana.

    a) Exprese el costo en función del número de tostadoras producidas, suponiendo que es lineal. Después, trace la gráfica.

    b) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica y qué representa?

    c) ¿Cuál es la intersección de la gráfica con el eje y y qué representa?

19. Una compañía que manufactura bicicletas estima que la utilidad U (en dólares) por vender un modelo particular está dada por $U = 45x^2 - 1035x - 67150$ donde x es el gasto en publicidad (en decenas de miles de dólares). Con el uso de este modelo, encuentre la cantidad en publicidad que dará una utilidad de \$170 000.

20. Calcule el valor del siguiente límite:

$$\lim_{t \to 2} \frac{t^2 - 4}{t^3 - 8}$$

21. Calcule el valor del siguiente límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^4 - x^4}{h}$$

22. Calcule el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

23. Si $C(x) = 16000 + 500x - 1{,}6x^2 + 0{,}004x^3$ es la función costo y $p(x) = 1700 - 7x$ es la función demanda, encuentre el nivel de producción que maximiza la utilidad.

24. Calcule los máximos, mínimos, puntos de inflexión e intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función:

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{8}{x^2} + \frac{1}{x^3}$$

25. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2 + 4xy + y^2 = 13$ en el punto $(2, 1)$.

26. Obtenga la derivada indicada:

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}, \qquad \frac{dy}{dx}$$

27. Obtenga la derivada indicada:

$$y = \ln\left(\frac{x^2 - 4}{2x + 5}\right), \qquad \frac{dy}{dx}$$

28. Obtenga la derivada indicada:

$$x^6 + y^6 = 1, \qquad \frac{d^2y}{dx^2}$$

29. Obtenga la derivada indicada:

$$y = \left(\frac{x - 1}{x^2 + x + 1}\right)^4, \qquad \frac{dy}{dx}$$

30. La función costo de una mercancía es $C(x) = 339 + 25x - 0.09x^2 + 0.0004x^3$.

    a) Encuentre la función de costo marginal.

    b) Obtenga e interprete $C'(100)$. ¿Qu predice?

    c) Compare $C'(100)$ con el costo de producir el artículo 101.

31. Si $C(x)$ es el costo de producir x unidades de un producto, entonces el costo promedio por unidad es de $c(x) = C(x)/x$. Si $C(x) = 16000 + 200x + 4x^{2/3}$, en dólares, encuentre:

    a) El costo, el costo promedio y el costo marginal a un nivel de producción de 1000 unidades.

    b) El nivel de producción que minimizará el costo promedio.

    c) El costo promedio mínimo.

32. Un fondo de inversión genera una rentabilidad R que depende de una cantidad de dinero invertido x, según la fórmula $R(x) = -0.002x^2 + 0.8x - 5$. ¿Cuánto se debe invertir para obtener la máxima rentabilidad?

33. Obtenga el valor de la siguiente integral:

$$\int_0^1 (3x + 1)^{\sqrt{2}}\, dx$$

34. Resuelva la siguiente integral:

$$\int \frac{x^5 + 1}{x^3 - 3x^2 - 10x}\, dx$$

35. Resuelva la siguiente integral:
$$\int \frac{ax}{x^2 - bx}\,dx$$

36. Resuelva la siguiente integral:
$$\int s2^s\,ds$$

37. Resuelva la siguiente integral:
$$\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$$

38. Resuelva la siguiente integral:
$$\int x\sqrt{x^2+2x+4}\,dx$$

39. La tasa de nacimientos de una población es $b(t) = 2200e^{0.024t}$ personas por cada año y la de decesos es $d(t) = 1460e^{0.018t}$ personas por cada año. Halle el área entre estas curvas para $0 \leq t \leq 10$. ¿Qué representa el área?

40. Resuelva la siguiente integral:
$$\int t^3 e^t\,dt$$

41. Determine el producto matricial $A \times B$ donde:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

42. Calcule el determinante de la matriz resultante del ejercicio anterior.

43. Determine el producto matricial $A \times B$ donde:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

    ¿Es posible realizar esta operación?

44. Determine el producto matricial $A \times B$ donde:
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

    Y el determinante de la matriz resultante.

45. Un empleado de restaurante examina la cantidad de dinero ganada en propinas después de trabajar un turno de 8 horas. El empleado tiene un total de \$95 en billetes de denominaciones de \$1, \$5, \$10 y \$20. El número total de billetes es de 26. El número de billetes de \$5 es 4 veces el número de billetes de \$10 y el número de billetes de \$1 es 1 menos que el doble del número de billetes de \$5. Escriba un sistema de ecuaciones lineales para representar la situación. A continuación, use matrices para hallar el número de cada denominación.